Exponenciális függvény

A korábbiakban olyan hatványalakban megadott hozzárendelési utasítással rendelkező függvényeket ábrázoltunk, amelyeknél a hatványalapot jelöltük az határozatlan mennyiséggel és a kitevő egy konkrét, pozitív előjelű racionális számérték volt. (A pozitív egész értékek esetén nevezzük őket hatványfüggvényeknek, a gyökös függvények pedig a racionális kitevős hatványozással azonosítható, amely kitevő a hatványozás és gyökvonás között teremt kapcsolatot.)

Megjegyzés: a negatív előjelű racionális kitevős hatvány függvények gyűjtőnéven racionális törtfüggvények, amelyek csak az emelt matematika témakörénél fordulnak elő

Most következzenek az olyan hatványfüggvények, amelyeknél a hatványalap valamilyen konkrét számérték és a kitevő legyen az határozatlan változó mennyiség. Az ilyen függvények hozzárendelési utasítása:

alakú, de ez még általánosabb alakra hozható a lehetséges műveletek kiegészítésével:

Az ilyen függvények ábrázolásakor a kitevőben lévő, változót tartalmazó összegzésnek keressük zérushelyét és segítségként helyettesítési értéket számítunk még a tőle -gyel kisebb és -gyel nagyobb számértékekre (ez a vízszintes tengely menti transzformáció lesz). A hatványkifejezés utáni konstans tagnak is lesz jelentősége, de ennél a függvénytípusnál nem szélsőértéket jelent majd (tényleges előjelével), hanem egy „korlátot” (tehát a függőleges tengely menti transzformációt jelent); végül a hatványkifejezés előtti szorzó előjele és nagyságrendje alapján változik/változtatjuk a felvett értékek halmazát.

Ezen függvények jellemzőik között azonnal észre kell vegyük, hogy a hatványalap nagyságrendje eleve befolyásolja a függvény grafikonjának „alakját”, ezért esetvizsgálattal nézzünk konkrét példákat.

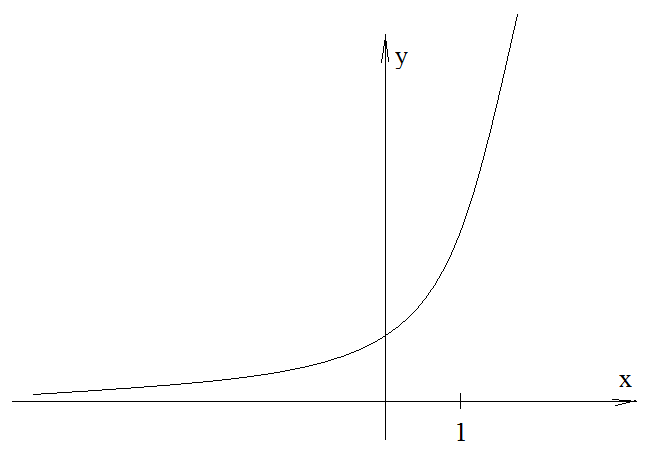
1.eset: a hatványalapra reláció teljesül, legyen pl.: ekkor

Ha a kitevőben lévő változónak keressük zérushelyét, akkor konkrétan adódik.

Készítsünk értéktáblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

(A táblázat értékei esetén reciprokképzést alkalmazunk; a kitevő esetén a hatványozás definíció kiegészítését alkalmazzuk, az kitevő esetén közvetlenül a definíció kerül alkalmazásra.) A függvény grafikonja:



Jellemzés tekintetében elmondható, hogy a függvény hozzárendelési utasításába bármilyen valós számérték behelyettesíthető, tehát értelmezési tartománya: .

A függvény grafikonjának összes pontját a függőleges tengelyre történő merőleges vetítés után láthatjuk, hogy a felvett értékek halmaza (mert a grafikon teljes egészében a vízszintes tengely felett van) az összes pozitív valós szám, tehát az értékkészlete: . Fontos megjegyezni, hogy az ezzel a hozzárendelési utasítással megadott függvény még a értéket sem veszi fel, negatívat pedig főleg nem, mert a kitevőben előforduló „szélsőséges” érték esetén is: csak reciprokképzés történik és nem előjelváltás!!!

Ennek a függvénynek nincs zérushelye, mert nem érinti és nem metszi a vízszintes tengelyt, de ez nem jelenti azt, hogy az ilyen típusú függvényeknek ne lenne zérushelye.

Szélsőérték tekintetében biztosan mondhatjuk, hogy nem lehet neki se minimuma, se maximuma. Ennél a függvénynél az emelt matematika témakörhöz tartozó (általánosabb érvényű) korlát fogalma alkalmazható.

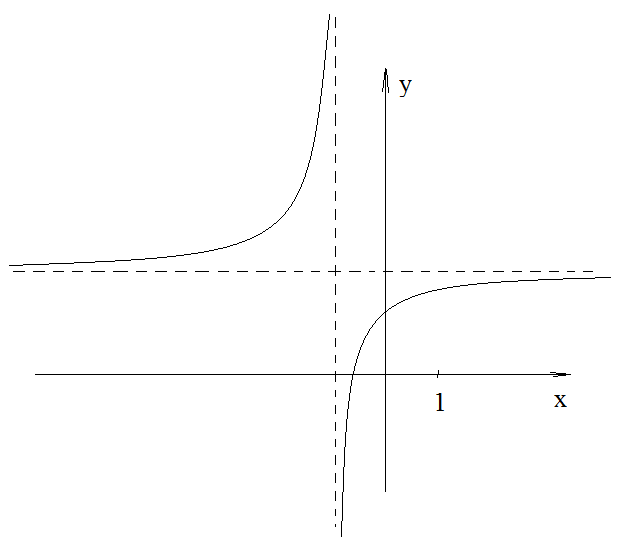
A „” betűjelű alsó korlát egy olyan érték, amelyhez képest a függvény nem vesz fel kisebbet, csak annyit vagy attól nagyobbat, ebben a konkrét példában ilyen érték vagy vagy és ezek közül az alsó korlátok közül a legnagyobb a nevezetes, ezt legnagyobb alsó korlátnak nevezzük, esetünkben .

A „” betűjelű felső korlát egy olyan érték, amelyhez képest a függvény nem vesz fel nagyobbat, csak annyit vagy attól kisebbet, ebben a konkrét példában nincs ilyen érték. Egyébként a felső korlátok közül a legkisebb a nevezetes, ezt legkisebb felső korlátnak nevezzük.

Tehát elmondható, hogy a függvények esetleges szélsőértéke egyben korlátot jelent (mert ténylegesen felveszi azt a legkisebb vagy legnagyobb értéket), de a korlát nem feltétlenül jelent szélsőértéket, mert ahhoz az alsó vagy felső korláthoz csak „közelítenek” a felvett függvényértékek, de előfordul, hogy azt nem éri el.

Azokat a függvényeket, amelyek alulról is és felülről is korlátosak, gyűjtőnéven korlátos függvénynek nevezzük.

Azon függvények, amelyek alsó- vagy felső korlátját jelentő értéknél a vízszintes tengellyel párhuzamosan berajzolunk egy szaggatott segédvonalat, azt aszimptota-tengelynek nevezzük. A korábbi függvények esetén a racionális törtfüggvény az, amelynek van aszimptota-tengelye, sőt rögtön kettő is van neki, az egyik a vízszintes, a másik a függőleges tengellyel párhuzamos és ezekhez közelítenek a függvény grafikonjának, a hiperbolának a szárai, pl.:



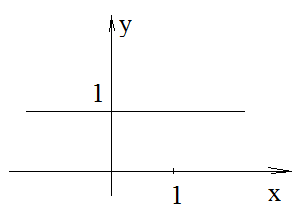
Az exponenciális függvénynek is van ilyen tengelye és azt minden esetben érdemes is lesz berajzolni, mégpedig a hozzárandelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstansérték a saját előjelével. Ha ilyen konstans értéket nem tüntetnek fel (mint pl. esetünkben) akkor az nullának értendő.

Monotonitás tekintetében elmondható a függvényről, hogy szigorú monoton növekedő, hiszen növekedő értékekhez növekedő értékek tartoznak. (Ugyanez a tendencia mondható el minden olyan exponenciális függvényről, amelynél a hatványalap meghaladja az -et, akár az -es hatványalap esetén is, de ahogyan látható lesz, a hozzárendelési utasítás megadható úgy, hogy -nél nagyobb hatványalap esetén csökkenő lesz a függvény.)

Paritás tekintetében ezek a függvények nem párosak és nem páratlanok és csak akkor lehet esélye arra, hogy páros legyen, ha a kitevőben nem szimplán az változó, hanem annak abszolútértéke van, tehát az páros.

Az exponenciális függvények, mindaddig amíg nincs valamilyen alaphalmaz vizsgálati kizáró feltétel, addig folytonosak, tehát grafikonjuk megrajzolható egyetlen folyamatos vonallal.

2.eset: a hatványalap , ekkor hozzárendelési utasítással megadott függvény tetszőleges valós szám hatványkitevő esetén mindig -et vesz fel, tehát ez speciális típusú lineáris függvény, úgynevezett konstans-függvény:



Ennek a függvények értelmezési tartománya a teljes valós számhalmaz, hiszen bármilyen valós érték behelyettesíthető az -es hatványalap kitevőjébe; értékkészlete egyetlen valós szám: . Nincs zérushelye, mert a függvény grafikonja a teljes értelmezési tartományán a vízszintes tengellyel párhuzamos egyenes. Szélsőértékére mondhatjuk, hogy az egyetlen felvett érték minimum is és maximum is (akár alsó- és felső korlátként is tekinthetünk rá). Monotonitás tekintetében (mert értékkészletében egyetlen számérték van) nem növekedő, nem csökkenő, ez egy állandó függvény. Paritás tekintetében egy páros függvény, mert tengelyesen szimmetrikus a függőleges tengelyre. A függvény grafikonja folytonos.

Megjegyzés: az exponenciális függvények invertálásával származtatható logaritmus függvény esetén az kizárjuk majd, mert ennek inverze nem lesz kölcsönösen egyértelmű függvény.)

3.eset: a hatványalap , ekkor hozzárendelési utasítással megadott függvény tetszőleges -tól valós szám hatványkitevő esetén mindig -t vesz fel, tehát ez speciális típusú lineáris függvény, úgynevezett konstans-függvény, amelynek grafikonja maga a vízszintes tengely. Abban tér el az előzőtől, mivel mennyiséget nem értelmezzük, hogy a függvény grafikonja az origóban nincs értelmezve, ott megszüntethető szakadási helye lesz.

4.eset: a hatványalap reláció teljesül, legyen pl.: ekkor

Ha a kitevőben lévő változónak keressük zérushelyét, akkor konkrétan adódik.

Készítsünk értéktáblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Már erre a néhány -re számolt helyettesítési értékből látnunk kell: baj van. Ha egész számokra folytatnánk a helyettesítési érték számítást, akkor az aktuális helyettesített egész paritásától függően váltakoznának a felvett függvényértékek előjelei. A vízszintes tengelyen, a növekedés irányának megfelelően minden esetben kétszer távolabb lenne az ábrázolandó pont a tengelytől, mint az előzőnél, de egyszer alatta aztán felette. Illetve a vízszintes tengelyen a csökkenés irányában pedig minden esetben fele akkora távolságra lenne az ábrázolandó pont a tengelytől, mint az előző, de szintén egyszer alatta aztán felette. Ám a végső problémát végül azon racionális kitevős hatványok adják, amelyeknél a nevező páros szám. Ilyen pl.: amelyet a hozzárendelési utasításba helyettesítve és alkalmazva a hatványozás és gyökvonás között kapcsolatot teremtő törtkitevős hatványt, akkor értéket kapunk, amely a valós számok halmazán irreális kifejezés. Ezen problémák miatt, a negatív előjelű hatványalappal rendelkező hatványkifejezésektől eltekintünk és csak akkor foglalkozunk vele, ha a feladat szövege megad kellő információt, hogy az értelmezett kifejezés legyen. Az inverz függvények esetén is eltekintünk majd ettől a hatványalaptól.

Most következzenek olyan exponenciális függvények, amelyek a feltételeknek eleget tesznek és előfordulhatnak.

1.Feladat: Ábrázolja és jellemezze a függvényeket!

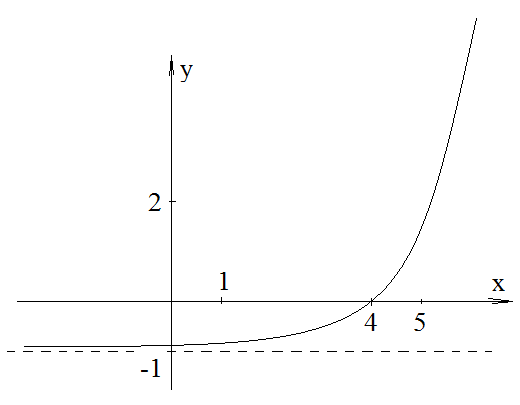
a)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint ez a legnagyobb alsó korlát. Zérushelye a grafikonról leovasható: . Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konvex.

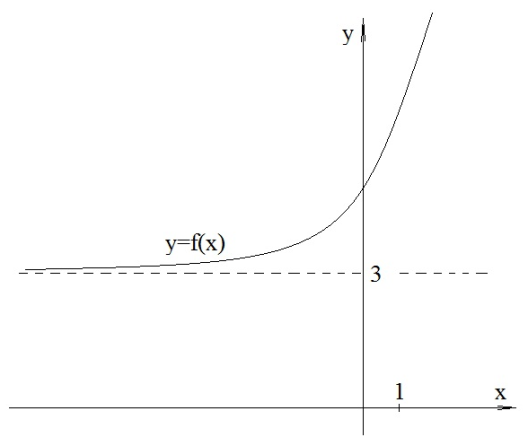
b)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nál és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint ez a legnagyobb alsó korlát. Zérushelye a grafikonról látható: nincs. Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konvex.

c)

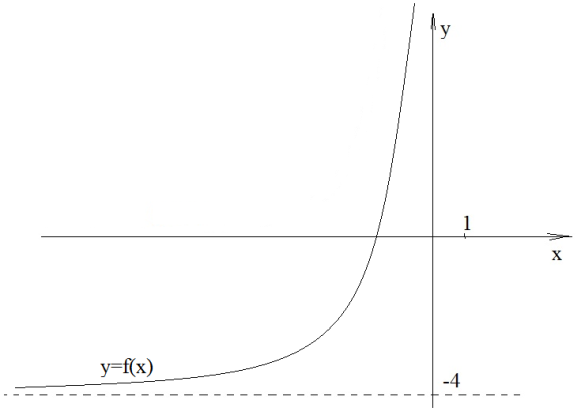
Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Mivel a kitevőben nem szimplán hanem van, ezért alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról látható: van, de nem tudjuk pontosan megmondani, ezért a hozzárendelési utasítás jobb oldalát egyenlővé tesszük nullával, tehát a megoldandó egyenlet: .

Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos.

Nem páros és nem páratlan, konvex.

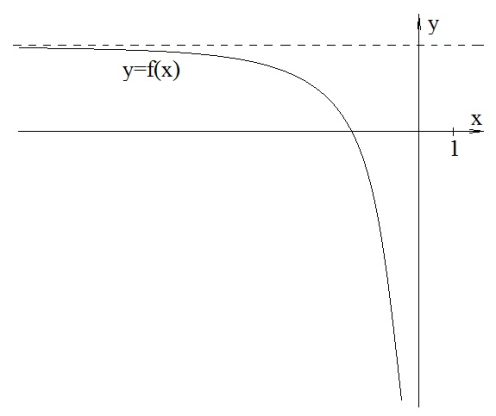
d)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely kisebb mint . Zérushelye a grafikonról látható: van, de nem tudjuk pontosan megmondani, ezért a hozzárendelési utasítás jobb oldalát egyenlővé tesszük nullával, tehát a megoldandó egyenlet: .

Szélsőértéke nincs (csak felső korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton csökkenő és folytonos.

Nem páros és nem páratlan, konkáv.

2.Feladat: Ábrázolja és jellemezze a függvényeket!

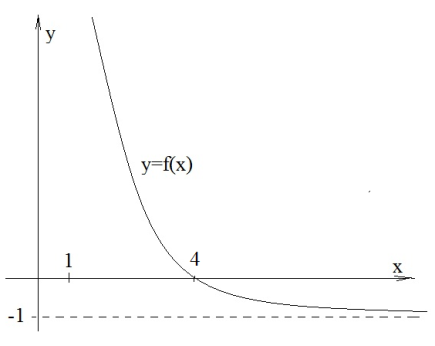
a)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról leovasható: . Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton csökkenő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konvex.

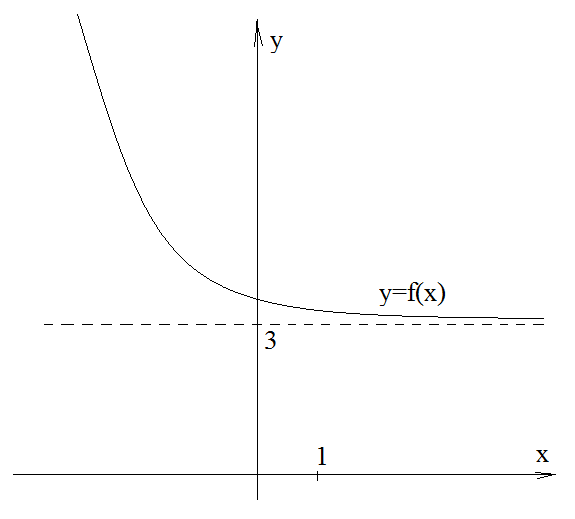
b)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról látható: nincs. Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton csökkenő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konvex.

c)

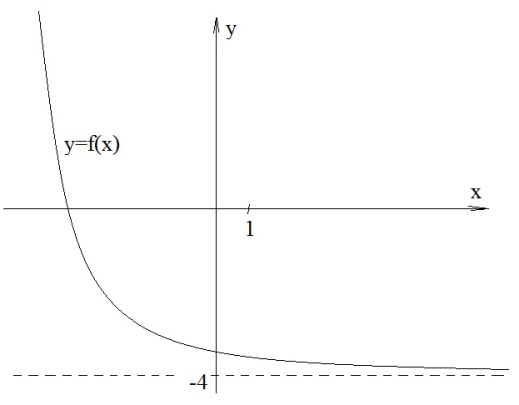
Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Mivel a kitevőben nem szimplán hanem van, ezért alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról látható: van, de nem tudjuk pontosan megmondani, ezért a hozzárendelési utasítás jobb oldalát egyenlővé tesszük nullával, tehát a megoldandó egyenlet: .

Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton csökkenő és folytonos.

Nem páros és nem páratlan, konvex.

d)

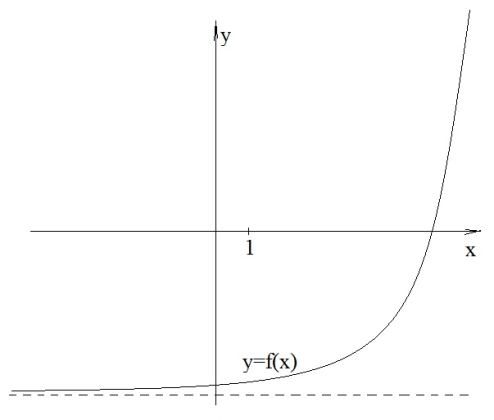
Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Mivel a kitevőben nem szimplán hanem van, ezért alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról látható: van, de nem tudjuk pontosan megmondani, ezért a hozzárendelési utasítás jobb oldalát egyenlővé tesszük nullával, tehát a megoldandó egyenlet:

Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos.

Nem páros és nem páratlan, konvex.

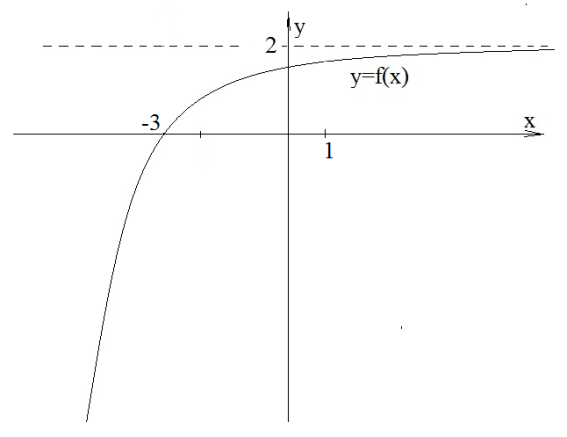
e)

Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely kisebb mint . Zérushelye a grafikonról látható: . Szélsőértéke nincs (csak felső korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konkáv.

f)

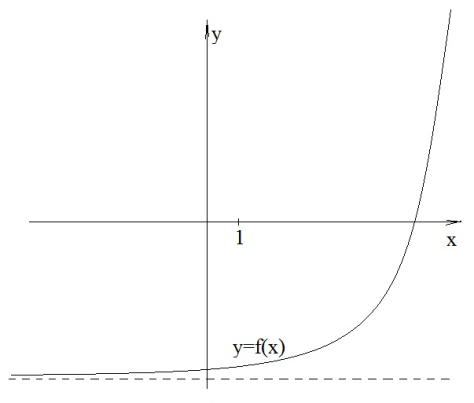
Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Mivel a kitevőben nem szimplán hanem van, ezért alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely nagyobb mint . Zérushelye a grafikonról leolvasható: van: . Szélsőértéke nincs (csak alsó korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton növekedő és folytonos. Nem páros és nem páratlan, konvex.

g)

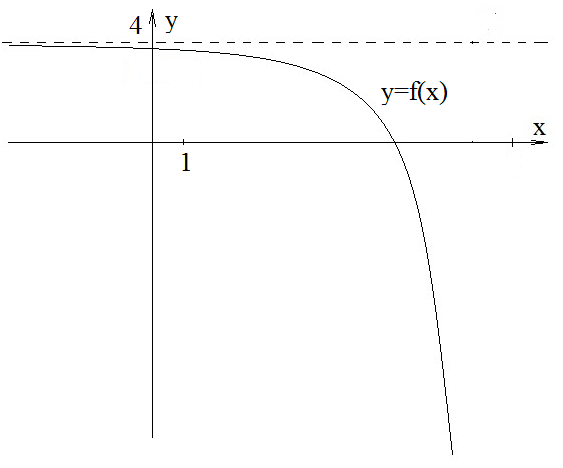
Keressük meg a kitevőben lévő összegzés zérushelyét: amelyből

Mivel a kitevőben nem szimplán hanem van, ezért alakítsuk át a hozzárendelési utasítást:

Készítsünk érték-táblázatot:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A hozzárendelési utasításban a hatványkifejezés utáni konstans értéknek megfelelően (előjelével együtt) rajzoljunk be egy aszimptota-tengelyt a vízszintes tengellyel párhuzamosan, esetünkben: -nél és illesszük a függvény grafikonját az ábrázolt pontokra:



Ez a függvény minden valós szám esetén értelmezett; értékkészletében benne van minden olyan valós szám, amely kisebb mint . Zérushelye a grafikonról látható: van, de nem tudjuk pontosan megmondani, ezért a hozzárendelési utasítás jobb oldalát egyenlővé tesszük nullával, tehát a megoldandó egyenlet: .

Szélsőértéke nincs (csak felső korlátja értékkel). Szigorú értelemben vett monoton csökkenő és folytonos.

Nem páros és nem páratlan, konkáv.